**№13-дәріс. Кейбір функцияларды интегралдау**

**Квадрат үшмүшелігі бар функцияларды интегралдау.** Мына төмендегі интегралдарды табу әдісін қарастырайық  және .

)  квадрат үшмүшелігіндегі  коэффициентін жақша алдына шығарып, одан толық квадратты бөліп аламыз;

) интегралға ,  алмастыруын енгіземіз;

) Оны екі интегралдың қосындысы етіп жазамыз. Сонда екі интегралымыз да кестелік интегралға келеді.

***1- мысал.*** 



.

**Рационал функцияларды интегралдау.** Рационал бөлшекті интегралдау деп,  интегралын табуды айтады. Мұндағы дұрыс рационал бөлшек, яғни  . Егер  болса, дұрыс бөлшек деп, ал  болса бұрыс бөлшек деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін алдымен алымын бөліміне бөлу арқылы оны көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысына жіктейміз. Мысалы,  Одан әрі қарай тек дұрыс рационал бөлшектерді интегралдауды қарастырамыз.

***Теорема.*** Әрбір дұрыс рационал бөлшектімына қарапайым бөлшектердің қосындысы түрінде жазуға болады:

1. 2.   3. 4. , мұндағы *А,* *В* - нақтыкоэффициенттер;  үшмүшелігінің нақты түбірлері жоқ (яғни ). ***Қарапайым бөлшектерді интегралдауды қарастырайық***.

 .

  мәнінде .

  интегралдау әдісі жоғарыда қарастырылған.

. , мұндағы  және бөліміндегі квадрат үшмүшеліктің дискриминанты . Квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып , , алмастыруын жасаймыз. Сонда  интегралын аламыз және оны екі интегралдардың қосындысы түрінде жазамыз. Бірінші интерал -ны дифференциал астына енгізу арқылы интегралданады:

.

Ал екінші интегралды  деп белгілеп, төменгідей есептейміз:

 

Бұл формуланы ***реккуренттік формула*** деп атайды. Реккуренттік формула арқылы ні  арқылы, ал ті арқылы таба отырып, ең соңында ны  арқылы табамыз.

***2- мысал.***  табу керек.  осыдан . , . Сонымен  бөлшегінде  болсын. Әрбір көпмүшелігін бірінші және екінші дәрежелі көпмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктеп жазуға болады: ,

мұндағы бүтін сандар. Сонда дұрыс бөлшек элементар бөлшектерге төменгідей жіктелінеді :



 

мұндағы нақты сандар. Осы сандарды табу үшін  теңдігінің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз. Содан соң теңдіктегі екі бөлшектің бөлімін алып тастасақ, екі жағында да көпмүшелік шығады. Осы теңдіктен бірдей дәрежелі тің алдындағы коэффиценттерді теңестіре отырып, алгебралық теңдеулер жүйесін құрамыз. Алынған теңдеулер жүйесінен  коэффиценттерінің мәндерін тауып, оларды  теңдігіне қоямыз. Осылай рационал бөлшектің жіктеуін табамыз. Осы әдісті ***анықталмаған коэффициенттер әдісі*** дейді.

***3-мысал*.**  интегралын есептеу керек. Интеграл астындағы функция бұрыс рационал бөлшек, сондықтан алымын бөліміне бөліп дұрыс бөлшекке айналдырамыз:  Соңғы қосылғышты қарапайым бөлшектерге жіктейміз: 

Бұдан,  :  ; : ; :   , , . Демек, . Сонымен, 

**Кейбір иррационал функцияларды интегралдау.** Иррационал функцияларды интегралдауда айнымалыны алмастыру арқылы рационал функцияның интегралына келуге болатын кейбір жағдайларды қарастырамыз.  түріндегі интегралдар  алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келеді.

***4- мысал.***  интегралын табайық. -тің дәрежесіндегі бөлшектердің ортақ бөлімі , олай болса берілген интегралды алу үшін  ауыстыруын жасаймыз.



.

Қарастырылған интеграл  түріндегі интегралдың дербес түрі

болады. Мұнда . Осы интегралды алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болады.

**Тригонометриялық функцияларды интегралдау.** Бұл пунктте біз  интегралын табуды қарастырамыз. Берілген интеграл  ***әмбебап алмастыруы*** арқылы рационал функцияның интегралына келтіріледі. Шынында да

, , , 

, мұндағы - рационал функция.

***5- мысал.***  .

Бұл әдісті көрсетілген кез келген интегралға қолдануға болады, ал  немесе  айнымалыларының дәрежесі бірден жоғары болса қолайсыз үлкен өрнектер шығады. Ондай жағдайларда келесі әдістерді қолдану керек.

.  түріндегі интеграл.

*а) *бүтін оң тақ сан болса, интеграл  түріне келтіріліп,  алмастырылуы жасалынады.

*б) *бүтін оң тақ сан болса, интеграл  түріне келтіріліп,  алмастырылуы жасалынады.

***6- мысал.***  

.

*в) *бүтін теріс емес жұп сан болса,  формулалары арқылы  пен тің реттері төмендетіледі.

. Мына , мұндағы *m, n* – тұрақты сандар, түріндегі интегралды алу үшін тригонометрияның формулаларын:



қолдану және көбейтінділерді қосындыға жіктеу арқылы берілген интегралды алу қиынға түспейді.

***Әдебиеттер:*** 1 нег.[372-382], 11 қос. [467-478].

***Бақылау сұрақтар:***

1. Құрамында квадрат үшмүшелігі бар функцияны интегралдау.

2. Рационал функциялар қалай интегралданады?

3. Әмбабап алмастыру деп қандай алмастыруды айтамыз?

4. Иррационал функцияларды интегралдау.